MECANIQUE DES FLUIDES

Statique des fluides (hydrostatique)

1 – PREAMBULE

La statique des fluides a pour but l'étude des fluides au repos. Il s'agit donc d'un cas particulier de la mécanique des fluides.

Démarche pour étudier un fluide au repos : un fluide étant une quantité de matière, on peut lui appliquer le PFS. Ceci donne **l'équation fondamentale de la statique des fluides**. Partant de cette équation fondamentale, on lui adjoint une « loi d'évolution » du fluide mis en jeu ; on peut par exemple considérer un fluide :

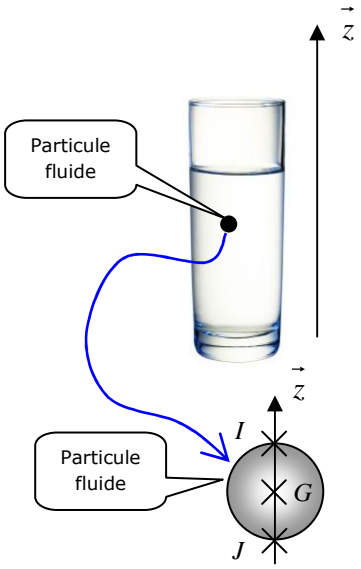
⇒ Incompressible et homogène → cas des liquides (comme l'eau)

⇒ Compressible et isotherme → modèle possible pour les gaz (il en existe d'autres…)

Ces deux cas particuliers sont traités plus loin.

2 – EQUATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES

L'entité élémentaire dans l'étude des fluides est ce qu'on nomme une **particule fluide**. Il s'agit de l'analogue du point matériel en mécanique du solide si ce n'est qu'elle dispose d'un volume mais tout petit d'un point de vue macroscopique. La réalisation du BAME et l'application du PFS à la particule fluide donne la loi de la statique des fluides :



$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} dP = P_I - P_J & \text{Différence de pression entre les points } I \text{ et } J \text{ (Pa)} \\ dz = z_I - z_J & \text{Différence d'altitude entre les points } I \text{ et } J \text{ (m)} \\ \rho & \text{Masse volumique du milieu fluide (kg.m}^{-3}\text{)} \\ g & \text{Intensité du champ de pesanteur (m.s}^{-2}\text{)} \end{cases}$$

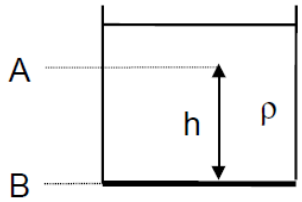
3 – FLUIDE INCOMPRESSIBLE ET HOMOGENE – LOI DE L'HYDROSTATIQUE

Dans le cas général, la masse volumique dépend de la pression et de la température mais l'expérience montre que c'est sensiblement le cas pour les gaz mais très peu pour les liquides.

→ Si la masse volumique ne dépend pas de la pression, le fluide est dit « **incompressible** ».

→ Si la température est la même en tout point ($T_A = T_B$), alors la masse volumique n'en dépend pas et le fluide est dit « **homogène** ».

Admettons enfin que le champ de pesanteur g soit constant (ce qui est globalement vrai si la dénivelée $\Delta z = z_A - z_B$ n'est pas excessive). Dans ce cas, l'intégration de l'équation fondamentale de la statique donne : $\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$



Le long de la ligne de courant AB, cela donne :

$$\Leftrightarrow \quad dP = -\rho \cdot g \cdot dz \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}}$$

Pression (Pa)
Masse volumique (kg.m^{-3})
Hauteur (m)
Champ de pesanteur (m.s^{-2})

$$\boxed{P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B}$$

C'est comme ceci qu'il faut l'écrire dans les exercices.

4 – FLUIDE COMPRESSIBLE ET ISOTHERME

On se propose ici de déterminer l'évolution de la pression P en fonction de l'altitude z pour un modèle simple d'atmosphère en utilisant le principe fondamental de la statique des fluides. Soit $P(z)$ cette fonction.

☞ *On gardera à l'esprit que ce modèle est un parmi de nombreux autres, plus ou moins complexes.*

Hypothèses sur l'atmosphère :

- Assimilée à un gaz parfait (la loi de Mariotte s'applique),
- Soumise uniquement au champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ (indépendant de l'altitude),
- Isotherme (pas de variation de température),
- Au repos dans un référentiel galiléen.

L'application de loi de l'hydrostatique avec la prise en compte des hypothèses précitées donne :

$$\boxed{P(z) = P_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}}$$

avec
- $P(z)$ Pression à l'altitude z (Pa)
- P_0 Pression à l'altitude de référence (Pa)
- M Masse molaire de l'atmosphère (kg.mol^{-2})
- g Intensité du champ de pesanteur (m.s^{-2})
- R Constante des gaz parfaits (J.kg^{-1}.K^{-1})
- T Température thermodynamique de l'atmosphère (K)
- z Altitude d'un point de l'atmosphère (m)
- z_0 Altitude de référence (m)

5 – THEOREME DE PASCAL

Soit un fluide incompressible en équilibre (au repos). Soient deux points A et B dans ce fluide. Leur pression initiale est $P_i(A)$ et $P_i(B)$.

A l'aide d'un dispositif quelconque, on applique une force ce qui a pour effet d'augmenter la pression au point A. Soit $P_f(A)$ la pression finale au point A.

On a donc, au point A, engendré une variation de pression $\Delta P_A = P_f(A) - P_i(A)$.

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Question : Quelle est la variation de pression induite au point B ?

Réponse :

Loi de l'hydrostatique entre A et B à l'état initial : $P_i(B) + \rho \cdot g \cdot z_B = P_i(A) + \rho \cdot g \cdot z_A$

Loi de l'hydrostatique entre A et B à l'état final : $P_f(B) + \rho \cdot g \cdot z_B = P_f(A) + \rho \cdot g \cdot z_A$

Par soustraction, on obtient : $P_f(B) - P_i(B) = P_f(A) - P_i(A) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta P_B = \Delta P_A}$

Ce résultat constitue le théorème de Pascal dont voici l'énoncé :

« Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible en équilibre est intégralement transmise en tout point du fluide ».